

Développement : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

ANALYSE & PROBABILITÉS
ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

Références :

- [QUE] QUEFFÉLEC H., ZUILY C., *Analyse pour l'agrégation*, 4^{ème} édition, Dunod, 2013, p205.
- [BMP] BECK V., MALICK J., PEYRÉ G., *Objectif Agrégation*, 2^{ème} édition, H&K, 2005, p97.

Pour les leçons :

- 157 : Matrices symétriques, matrices hermitiennes.
- 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (de dimension finie).
- 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie.
- 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.
- 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.
- 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples et applications.

Attention : Je fais un peu différemment des références, le développement suit une trame similaire mais la preuve est adaptée pour être plus simple (selon moi). Donc c'est normal s'il y a des parties qui ne correspondent pas vraiment aux livres par moments (ou des modifications).

Si A est une partie d'un espace affine (par exemple vectoriel), $\text{Conv}(A)$ désigne son enveloppe convexe.

Lemme 1.

Soient H un $\mathbb{R}$ -espace de HILBERT et C une partie convexe non vide fermée de H . Alors, pour tout $x \in H \setminus C$, il existe $f \in H^*$ continue telle que $f(x) > \sup_{y \in C} f(y)$.

PREUVE : Soit $x \in H \setminus C$. On note $a = p_C(x)$ la projection de x sur C . On pose $f = \langle a - x | \cdot \rangle$, qui est linéaire.

Comme $x \notin C$, $x \neq a$. Donc $f(a - x) = \|a - x\|^2 > 0$. Ainsi, $f(a) > f(x)$.

Soit $y \in C$. Par la caractérisation de la projection sur un convexe fermé, on a :

$$\langle x - a | y - a \rangle \leq 0.$$

Donc $f(a) \leq f(y)$.

On a montré que :

$$\forall y \in C \quad f(x) < f(a) \leq f(y).$$

On pose $g = -f$, qui est encore une forme linéaire continue sur H . On a :

$$\forall y \in C \quad g(y) \leq g(a) < g(x).$$

En passant au sup sur C , on a le résultat. □

Lemme 2.

Soient H un $\mathbb{R}$ -espace de HILBERT et A une partie non vide de H . Alors :

$$x \in \overline{\text{Conv}(A)} \iff \forall f \in H^* \quad f(x) \leq \sup_{y \in \text{Conv}(A)} f(y).$$

PREUVE : La contraposée du lemme précédent (avec $C = \overline{\text{Conv}(A)}$, qui est fermé et convexe) donne que, pour tout $x \in H$:

$$\left(\forall f \in H^* \quad f(x) \leq \sup_{y \in \text{Conv}(A)} f(y) \right) \implies x \in \overline{\text{Conv}(A)},$$

et, par définition du sup, si $x \in \overline{\text{Conv}(A)}$ et $f \in H^*$, on a directement que $f(x) \leq \sup_{y \in \text{Conv}(A)} f(y)$. □

Théorème 3. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.

Soient $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ sa norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour $\|\cdot\|$, qu'on note B .

PREUVE : $O_n(\mathbb{R})$ étant un compact, d'après le théorème de CARATHÉODORY, $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est un compact. Donc :

$$\overline{\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} = \text{Conv}(O_n(\mathbb{R})).$$

★ ÉTAPE 1 : Trouvons tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.

Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$. D'après le théorème de représentation de RIESZ, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(A, B) \mapsto \langle A|B \rangle = \text{Tr}(A^t B)$, est un espace euclidien, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(X) = \text{Tr}(X^t M)$.

★ ÉTAPE 2 : Montrons que $B \subset \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$. D'après ce qui précède et le lemme 2, cela revient à montrer que pour tout $X \in B$, $\text{Tr}(X^t M) \leq \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} \text{Tr}(U^t M)$.

Grâce au théorème de décomposition polaire, on écrit ${}^t M = U_0 S$ avec $U_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de S et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de S .

D'une part,

$$\begin{aligned} \sup_{U \in \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} \text{Tr}(U^t M) &\geq \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} \text{Tr}(U^t M) \\ &\geq \text{Tr}(U_0^{-1} {}^t M) \\ &\geq \text{Tr}(S) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ &\geq \sum_{i=1}^n \|S e_i\|_2. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $X \in B \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme $X^* = {}^t X$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X^t M) &= \sum_{i=1}^n \langle X^t M e_i | e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle {}^t M e_i | {}^t X e_i \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|{}^t M e_i\|_2 \|{}^t X e_i\|_2 \quad (\text{par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|{}^t M e_i\|_2 \|{}^t X\| \|e_i\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|{}^t M e_i\|_2 \quad (\text{car } \|{}^t X\| = \|X\| \leq 1 \text{ et } \|e_i\|_2 = 1) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|U_0 S e_i\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|S e_i\|_2 \quad (\text{car } U_0 \text{ est orthogonale}) \\ &\leq \sup_{U \in \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} \text{Tr}(U^t M), \end{aligned}$$

par le travail qui précède.

Par conséquent, $\text{Tr}(X^t M) \leq \sup_{U \in \overline{\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))}} \text{Tr}(U^t M)$. D'après le lemme 2, $X \in \overline{\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} = \text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

D'où l'inclusion souhaitée.

★ ÉTAPE 3 : Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $X \in O_n(\mathbb{R})$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Xx\|_2 \leq \|x\|_2$ (on a en fait égalité), donc $\|X\| \leq 1$, ce qui prouve que $X \in B$. Donc $O_n(\mathbb{R}) \subset B$. Ainsi, le convexe B contient $O_n(\mathbb{R})$, donc il contient le plus petit convexe contenant $O_n(\mathbb{R})$, qui est $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

Cela achève la preuve. $\square$